

Zur Quantisierung des Dirac-Feldes

Von WALTER FRANZ

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Münster i. W.
(Z. Naturforsch. 14 a, 493—499 [1959]; eingegangen * am 5. März 1958)

Es wird eine Methode der Feldquantisierung entwickelt, welche dem Grundsatz Rechnung trägt, daß der Zustandsvektor Ausdruck der Kenntnis eines Beobachters von dem beobachteten System ist. Dies schließt eine Beschreibung des Feldes auf einer raumartigen Fläche aus, nötigt vielmehr zu einer Beschreibung im Inneren des vergangenen Lichtkegels des Beobachters. Dadurch wird der Beobachter dynamisch in das System mit einbezogen. Dies läßt sich in widerspruchsfreier Weise unter Wahrung der physikalischen Erhaltungssätze durchführen, wenn man das beobachtete DIRAC-Feld vom Standpunkt eines einzelnen DIRAC-Teilchens aus beschreibt, dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeit durch ein klassisches DIRAC-Feld bestimmt wird. Die Wechselwirkung zwischen Beobachter und Feld liefert gleichzeitig auch Wechselwirkungen innerhalb des Feldes selbst. Die Randbedingungen, welche sich aus dem Variationsproblem ergeben, lassen nur das „*expanding universe*“ als Rahmen der Weltbeschreibung zu; die Theorie wird dadurch zunächst kosmologisch, erlaubt jedoch die Abseparierung eines Mikro-Systems.

Der Zustandsvektor eines quantenmechanischen Systems beschreibt die Kenntnis, welche ein Beobachter auf Grund vorangegangener Messungen über das System besitzt. Das Ergebnis einer neuen Messung läßt sich im allgemeinen nicht bestimmt voraussagen, man kann lediglich aus dem Zustandsvektor die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen möglichen Meßwerte errechnen. Bei Ausführung der Messung ändert sich der Zustandsvektor in nicht determinierter Weise.

Die relativistischen Quantentheorien der Felder lassen bisher diese aus der Punkt-Quantenmechanik gewohnte Interpretation nicht zu, vielmehr beschreiben sie den Zustand auf einer raumartigen Fläche des R_4 , obwohl wegen der endlichen Signalgeschwindigkeit kein Beobachter über den gegenwärtigen Zustand aus Messungen Kenntnis besitzen kann; seine Kenntnis beschränkt sich vielmehr auf den Inhalt des rückwärtigen Lichtkegels („Beobachtungskegel“). Es erscheint deshalb konsequent, in den Zustandsvektor des Feldes nur Angaben über das Innere des Beobachtungskegels aufzunehmen. Man könnte zunächst daran denken, den Zustand nur *auf* dem Lichtkegel des Beobachters zu beschreiben; da dabei aber die raumartigen und zeitartigen Grenzwerte am Beobachtungskegel bestimmt verschieden und von den Werten auf dem Kegel zu unterscheiden wären, würde die Beschreibung — wenn sie überhaupt durchführbar ist — voraussichtlich singulär. Wenn man dagegen die Beschreibung im Inneren des Beobachtungskegels vornimmt (wodurch der momentane Zustand des Feldes eine gewisse zeitliche Tiefe erhält, welche bei der 3-dimensionalen Interpretation durch

* Neufassung eingegangen am 31. Dezember 1958.

eine Zeit-Integration beseitigt werden muß), so läßt sich ein einfacher, nicht-singulärer Formalismus angeben, welcher mit den grundlegenden physikalischen Forderungen verträglich ist. Dies soll in der vorliegenden Note gezeigt werden. — Ob eine Feldtheorie dieser Art Züge unserer wirklichen Welt wiederzugeben vermag, muß erst untersucht werden.

Die Beschreibung des Feldzustandes im Inneren des Beobachtungskegels bedeutet, daß die Dynamik des Beobachters in die Feldmechanik einbezogen wird; denn die vom Beobachter-Ort abhängige Beschreibung kann nicht ohne dynamische Rückwirkung bleiben. Will man nichts als die Quantisierung des reinen DIRAC-Feldes erreichen, so hat man an die Stelle des „Beobachters“ ein herausgegriffenes DIRAC-Teilchen zu setzen, von dessen Standpunkt aus das Feld beschrieben wird. In diesem nur mehr wenig anthropomorphen Sinne soll im folgenden das Wort „Beobachter“ verstanden werden. Da der Beobachter über seine Existenz sicher Bescheid weiß (*cogito, ergo sum*), muß er (im Gegensatz zu dem beobachteten Feld ψ) durch ein klassisches (*c-Zahl*-) DIRAC-Feld Ψ beschrieben werden, welches die Wahrscheinlichkeits-Amplitude für den Beobachterort angibt; eine solche Angabe hat freilich nur Sinn, wenn ein absoluter „Ursprung“ des raum-zeitlichen Koordinatensystems vorhanden ist. Welcher Art dieser „Ursprung“ ist, ergibt sich aus den Grundlagen der Theorie zwangsläufig (Abschn. 2). Auch das Wirkungsprinzip für das Gesamt-Problem läßt sich sofort angeben, wenn man berücksichtigt, daß dem Beobachter neben seinen vierdimensionalen Koordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 ($z_4 = c t, z^4 = -c t$) ein Zeitparameter z_0 für den Ablauf des Geschehens zuzuschrei-



ben ist; aus der Formulierung des Problems mittels der DIRAC-Gleichung läßt sich leicht folgern, daß z_0 die Eigenzeit des Beobachters ist. Wir nennen den Zustandsvektor des Feldes Φ und haben als Wirkungsfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \equiv & \int d^4z (\Phi | \Psi^*(x) \left\{ \int d^4x \left\langle \hat{\psi}(x) \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{\psi}(x) \right\rangle \right. \\ & \left. + \gamma_j \frac{\partial}{\partial z_j} - i \frac{\partial}{\partial z_0} \right\} \Psi | \Phi) \\ & + \int d^4z (\Phi | \int d^4x w(x, z) | \Phi); \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (1)$$

Differentialoperatoren, welche zwischen zwei Faktoren stehen, sollen – soweit es darauf ankommt – immer die bezüglich der beiden Faktoren symmetrierte Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{1}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial x} \quad (2)$$

haben. – Der Wechselwirkungsoperator $w(x, z)$ enthält die Rückwirkung des Feldes auf den Beobachter in Gestalt einer geeigneten Kombination der beiderlei Spinoren; er bringt automatisch auch die Wechselwirkung innerhalb des ψ -Feldes hervor (s. dazu Abschn. 5). – Die Feldbeschreibung im Inneren des Beobachtungskegels hat zur Folge, daß auch Φ von den Beobachter-Koordinaten z abhängt. Wegen seiner Deutung als HILBERT-Vektor des beobachteten Feldes für den Fall, daß der Beobachter sich zur Eigenzeit z_0 bei z_j befindet, kann von vornherein angenommen werden, daß Φ für alle Werte von z normiert ist:

$$(\Phi | \Phi) = 1. \quad (3)$$

Da in der Wirkungsfunktion nur das Produkt $\Psi \Phi$, nicht Ψ und Φ einzeln differenziert werden, kann sich die Normierungsbedingung (3) nicht aus dem Variationsprinzip von selbst ergeben, sie muß vielmehr als Nebenbedingung mittels eines LAGRANGE-

schen Multiplikators λ in das Variationsprinzip aufgenommen werden. Dieses lautet dann

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dz_0 [\mathcal{Q} - \int d^4z \lambda(z) (\Phi | \Phi)] = 0. \quad (4)$$

Dabei sind alle Variationen der Feldgrößen zugelassen, welche stetig und differenzierbar sind und an den Grenzen $z_0 = t_1$ und $z_0 = t_2$ verschwinden.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Zustandsvektoren sowie die Vertauschungsrelationen in solcher Weise einzuführen, daß die Theorie frei von Widersprüchen und Singularitäten ist, daß in ihr eine Teilchenzahl definiert ist, für welche ein Erhaltungssatz gilt, und daß weiterhin Teilchen und Antiteilchen in symmetrischer Weise behandelt werden.

1. Vertauschungsrelationen und Zustandsvektoren

Da die Koordinate z_0 die Rolle der Zeit übernimmt, wird man für die Feld-Operatoren nach den Gedankengängen von BECKER und LEIBFRIED¹ ohne weiteres die 4-dimensionale δ -Funktion als Antikommutator annehmen; aus später ersichtlichem Grunde nehmen wir einen Faktor 2 gegenüber der üblichen Form auf:

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)\} = 2 \delta(x, y); \quad (5)$$

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)\} = 0; \quad \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)\} = 0.$$

$\delta(x, y)$ bedeutet dabei die δ -Funktion hinsichtlich Raum- und Spin-Koordinaten. – Durch diese Vertauschungsrelation erreicht man, daß man Eigenzustände des Teilchenzahloperators

$$n \equiv \int d^4x \langle \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x) \rangle \quad (6)$$

aus dem Vakuumzustand Φ_0 erhält, indem man Operatoren ψ und $\hat{\psi}$ auf ihn anwendet, also bildet

$$\Phi_{kl} = \frac{1}{V k! l!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_k \int d^4y_1 \dots \int d^4y_l f_{kl}(x_1 \dots x_k | y_1 \dots y_l | z) \langle \hat{\psi}(x_1) \dots \hat{\psi}(x_k) \hat{\psi}(y_1) \dots \hat{\psi}(y_l) \rangle \Phi_0. \quad (7)$$

Die eckige Klammer $\langle \rangle$ deutet dabei eine geeignete Ordnungsvorschrift für die Faktor-Reihenfolge an (s. u.). Die Koeffizienten-Funktionen f_{kl} müssen als stetig und differenzierbar vorausgesetzt werden, damit man sie dem Variationsproblem der Gln. (1) und (4) unterwerfen kann. Sie hängen von den Raum- und Spinkoordinaten sämtlicher Räume x und y ab, ferner von den fünf Raum-Zeit-Koordina-

ten des Beobachters, nicht jedoch von seinen Spin-Koordinaten, welche lediglich in Ψ enthalten sind.

In einer regulären Feldtheorie dürfen nur HILBERT-Vektoren endlicher Länge vorkommen. Dies verbietet die unmittelbare Anwendung quadratischer Feldoperatoren wie n auf einen Zustandsvektor, da sich hierdurch ein HILBERT-Vektor unendlicher Länge ergeben würde; denn nach (5) enthält $n n$ einen unendlichen Kommutator, nämlich $\int dx \int dy \delta^2(x, y)$.

¹ R. BECKER u. G. LEIBFRIED, Z. Phys. 125, 346 [1949].

Wir beschränken uns daher auf die Behandlung von Matrixelementen solcher quadratischer Operatoren bezüglich regulärer HILBERT-Vektoren. Die übliche Vakuumdefinition ist dabei nicht möglich; man kann sie jedoch ersetzen durch das Postulat, daß *der Vakuum-Erwartungswert jedes alternierenden Produktes von Feldoperatoren verschwindet*:

$$(\Phi_0 | \langle \psi_1 \dots \psi_k | \psi_1 \dots \psi_l \rangle | \Phi_0) = 0. \quad (8)$$

Das alternierende Produkt soll definiert sein als Mittelwert aller mit Vorzeichen genommenen Permutationen der Faktoren:

$$\langle A_1 \dots A_n \rangle \equiv \frac{1}{n!} \sum_p (-1)^p p(A_1 \dots A_n). \quad (9)$$

Dies entspricht der üblichen Definition des Zeit-Produktes für gleichzeitige Faktoren („gleichzeitig“ hier: gleiches z_0).

Aus (5) erhält man für alternierende Produkte das *Ordnungs-Theorem*

$$\begin{aligned} \langle A_1 \dots A_m \rangle \langle B_1 \dots B_n \rangle &= \langle A_1 \dots A_m B_1 \dots B_n \rangle \\ &+ \Sigma \text{ Kontraktionen } [AB]. \end{aligned} \quad (10)$$

Dabei sind nacheinander die ein- und mehrfachen Kontraktionen zwischen Paaren $A_j B_k$ zu bilden; die Paare werden durch ihre Kontraktion ersetzt, zuzüglich des Vorzeichens der Permutation, welche erforderlich ist, um die Partner unvertauscht nebeneinander zu setzen. Die Kontraktionen der Feldoperatoren sind gleich ihrem halben Antikommutator; die einzige von Null verschiedene Kontraktion ist also nach Gl. (5)

$$\text{Kontr}[\psi(x) \psi(y)] = \delta(x, y). \quad (11)$$

Um dies ohne einen Faktor $1/2$ zu erhalten, haben wir in Gl. (5) den Faktor 2 aufgenommen.

Die Symmetrie zwischen ψ und ψ^* , also zwischen Teilchen und Antiteilchen, wird durch die Vakuum-Definition (8) garantiert. Gleichzeitig folgt aus (8), daß nur vollständig aus-kontrahierte Terme von Erwartungswerten von Null verschieden sind; solche ergeben sich nur, wenn zwischen $(\Phi_0 |$ und $| \Phi_0)$ gleichviele Faktoren ψ und ψ^* enthalten sind. Mittels (7) ergibt sich daraus die Aussage, daß

$$(\Phi_{kl} | \Phi_{k'l'}) = 0, \quad (12)$$

wenn nicht $k = k'$ und $l = l'$.

Die Φ_{kl} sind also aufeinander orthogonal. Weiter-

hin errechnet man mittels Gl. (6), daß

$$(\Phi_{kl} | n | \Phi_{kl}) = (k - l) (\Phi_{kl} | \Phi_{kl}). \quad (13)$$

Die Teilchenzahl hat also im Zustand Φ_{kl} den Erwartungswert $k - l$. Da überdies Φ_{kl} orthogonal ist auf den Zuständen, welche die gleiche Differenz $k - l$, aber kleinere Werte für k und l aufweisen, kann man Φ_{kl} als den *Zustand mit genau k Teilchen und l Antiteilchen* auffassen. Wir würden allerdings auch nicht-diagonale Matrixelemente des Operators n erhalten, wenn wir beide Operatoren von (6) nach rechts oder beide nach links kontrahieren würden – solche Kontraktionen müssen wir aber schon aus Gründen der Regularität ausschließen, sie würden uns nämlich genau die Singularitäten in die Theorie bringen, welche wir durch Beschränkung auf reguläre Matrixelemente vermeiden wollten. Es erscheint daher konsequent, gleichzeitig eine Beschränkung des HILBERT-Raums und des Operator-Bereichs vorzunehmen, indem einerseits nur HILBERT-Vektoren endlicher Länge (mit stetigen und differenzierbaren Gewichtsfunktionen f_{kl}) zugelassen werden, andererseits bei der Anwendung quadratischer Operatoren wie n (welche also zwei Faktoren *mit derselben Koordinate* enthalten!) nur die einfach kontrahierten Terme des Ordnungstheorems (10) beibehalten, dagegen die nicht oder doppelt kontrahierten unterdrückt werden. Dies ist auch im Hinblick auf das Variationsproblem (4) befriedigend; andernfalls würden nämlich aus dem dynamischen Teil von (1) Übergänge zwischen verschiedenen Komponenten Φ_{kl} resultieren, welche sinnvoll nur durch die Wechselwirkung hervorgerufen werden sollten.

Den allgemeinen Zustandsvektor Φ erhalten wir durch Superposition von Zuständen Φ_{kl} :

$$\Phi = \sum_{kl} \Phi_{kl}. \quad (14)$$

Die in den einzelnen Summanden auftretenden SCHRÖDINGER-Funktionen $f_{kl}(x_1 \dots x_k | y_1 \dots y_l | z)$ sind Wahrscheinlichkeitsamplituden für einen Zustand mit k Teilchen und l Antiteilchen. Sie bilden zusammen mit Ψ sowie \hat{f}_{kl} , $\hat{\Psi}$ die Feldfunktionen des Gesamt-Problems. Die Feldoperatoren ψ und ψ^* lassen sich durch Ausführen der Kontraktionen aus dem Variationsproblem (1), (4) entfernen, sie treten also in der quantisierten Theorie nur blind auf. Trotzdem bleibt ihre Verwendung zweckmäßig, da viele Ausdrücke sich einfacher durch Φ und ψ darstellen, als explizit durch die f_{kl} .

2. Feldgleichungen, Randbedingungen und expanding universe

Die Feldgleichungen erhält man aus (4), indem man zunächst nur solche Variationen zuläßt, welche nicht nur bei $z_0 = t_1, t_2$ verschwinden, sondern auch an den Rändern der R_4 -Integrationsgebiete. Die Feldgleichungen für $\Psi, \dot{\Psi}$ sind

$$\delta\Omega/\delta\dot{\Psi} = 0; \quad \delta\Omega/\delta\Psi = 0. \quad (15)$$

Analog (vermehrt um einen aus der Nebenbedingung herrührenden Term) sehen die Feldgleichungen für f_{kl}, \dot{f}_{kl} aus. – Geht man von einem Zustand aus, in welchem die Feldgleichungen gelten, und variiert auch an den R_4 -Rändern, so ergeben sich die Randbedingungen

$$\frac{\delta\Omega}{\delta(\partial f_{kl}/\partial x_j)} d\sigma_j^{(x)} = 0; \quad \frac{\delta\Omega}{\delta(\partial\Psi/\partial z_j)} d\sigma_j^{(z)} = 0.$$

Die Variationsableitungen sollen dabei nach den explizit in Ω auftretenden Ableitungen der Feldfunktionen ausgeführt werden. $d\sigma_j$ ist ein Oberflächenelement des Randes. Nach (1) haben die Randbedingungen die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{f}_{kl} \gamma_j d\sigma_j^{(x)} &= 0; & d\sigma_j^{(x)} \gamma_j f_{kl} &= 0; \\ \dot{\Psi} \gamma_j d\sigma_j^{(z)} &= 0; & d\sigma_j^{(z)} \gamma_j \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Die Randbedingungen für f_{kl}, \dot{f}_{kl} müssen für jedes der Koordinatenquadrupel x, y gelten. Die γ_j wirken auf die Spinkoordinate, welche zu der jeweils herausgegriffenen R_4 -Koordinate gehört.

Es mag zunächst zweifelhaft erscheinen, ob diese Randbedingungen bei einer Differentialgleichung 1. Ordnung wie der DIRACschen überhaupt vorgeschrieben werden dürfen. Erst bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung kann ja eine homogene Randbedingung auf einer geschlossenen Oberfläche vorgeschrieben werden. Da man die Gleichungen 1. Ordnung für vier Spinorkomponenten in Gleichungen 2. Ordnung für zwei von ihnen umwandeln kann, kann der DIRAC-Gleichung nur eine zweikomponentige Randbedingung auferlegt werden. Die Bedingungen (16) sind nun genau dann zweikomponentig, wenn $d\sigma_j$ ein Nullvektor ist ($d\sigma_j d\sigma^j = 0$); dies bedeutet, daß nur *Lichtkegel als Berandung* in Frage kommen (allgemeiner: Hüllflächen von Lichtkegel-Scharen; davon sind jedoch nur die Lichtkegel selbst LORENTZ-invariant). Der Beobachtungskegel $(x-z)^2 = 0$ kann somit, wie vorgesehen, als zukünftige Begrenzung des R_4 -Gebietes für die Koordi-

naten x, y zugelassen werden. Die Begrenzung in der Vergangenheit muß ein in die Zukunft geöffneter Lichtkegel sein; seine Spitze kann dann als „Ursprung“ für die Ortsbestimmung des Beobachters dienen. Da auf andere Weise aus dem System selbst kein absoluter Ursprung festgelegt werden kann, bedeutet dies, daß man notwendig mit einem in der Vergangenheit endlichen R_4 -Gebiet zu rechnen hat, welches von einem in die Zukunft geöffneten Lichtkegel begrenzt ist. *Unser theoretischer Ansatz zwingt also zur Vorstellung des „expanding universe“, zunächst in dem Augenblicks-Zustandsbild des Beobachters; mit der Bewegung des Beobachters auf seiner Weltlinie (welche aus dem Variationsproblem folgt) überträgt sich dies aber auch auf den Ablauf in Abhängigkeit von z_0 .* – Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\dot{\Psi}(z) \Psi(z)$ für den Beobachter gibt, vom Standpunkt des Bezugsteilchens gesehen, ebenso gut die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß sich der Ursprung im vierdimensionalen Abstand $-z$ vom

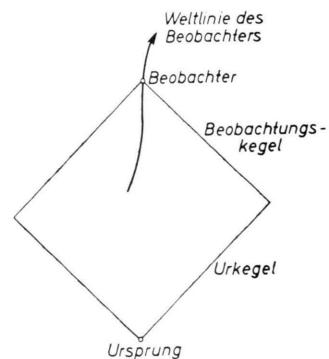


Abb. 1. Weltgebiet des Beobachters.

Beobachter befindet. – Den durch den Ursprung bestimmten vorderen Lichtkegel wollen wir als „Urkegel“ bezeichnen (Abb. 1).

Da z_j nach diesem Bild immer zukünftige Richtung hat, stellt der Urkegel auch für z die Begrenzung des R_4 -Gebietes dar; nach der Zukunft ist das z -Gebiet jedoch nicht (bzw. durch den unendlich fernen Lichtkegel) begrenzt.

Die Einführung des absoluten Ursprungs hat zur Folge, daß nur LORENTZ-Transformationen mit festgehaltenem Ursprung zugelassen sind. Ein Punkt des R_4 erfährt dabei eine mit der Drehung gekoppelte Translation. Weltlinien, welche radial vom Ursprung wegweisen, sind kosmologisch ausgezeichnet; ihre Punkte befinden sich in der Mitte der Welt, wenn sie auf Ruhe transformiert werden.

3. Erhaltungssätze

Geht man von einem Zustand aus, in dem Feldgleichungen und Randbedingungen erfüllt sind, und führt sodann eine Variation der Feldfunktionen aus, welche auch bei $z_0 = t_1, t_2$ nicht verschwindet, so ergibt sich ein Ausdruck der Gestalt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dz_0 [\Omega - \int d^4z \lambda(\Phi | \Phi)] = F(t_2) - F(t_1). \quad (17)$$

Dies gilt auch noch, wenn zusätzlich eine infinitesimale Koordinatentransformation δz_i ausgeführt wird, welche die Grenzen der R_4 -Bereiche nicht verändert, nämlich eine gemeinsame Translation oder Drehung aller Koordinaten x, y, z sowie der Koordinate des Ursprungs (welche dabei nicht 0, sondern etwa ζ genannt werden müßte). — $F(z_0)$ hat die Gestalt

$$F(z_0) = \int d^4z \frac{\delta \Omega}{\delta (\partial \Psi / \partial z_0)} \delta \Psi + \int d^4x \frac{\delta \Omega}{\delta (\partial f_{kl} / \partial z_0)} \delta f_{kl} + \text{konj. komplex.} \quad (18)$$

$$(\Phi | \dot{\Psi} \left\{ \int d^4x \left\langle \dot{\psi}(x) \gamma_j \frac{\overline{\partial}}{\partial x_j} \psi(x) \right\rangle + \gamma_j \frac{\overline{\partial}}{\partial z_j} - i \frac{\overline{\partial}}{\partial z_0} \right\} \Psi | \Phi) + (\Phi | \int w dx | \Phi) - \lambda(\Phi | \Phi) = 0. \quad (19 \text{ a})$$

Variiert man analog Φ und multipliziert mit $\dot{\Phi}$, so erhält man

$$(\dot{\Phi} | \dot{\Psi} \left\{ - \int d^4x \left\langle \dot{\psi}(x) \gamma_j \frac{\overline{\partial}}{\partial x_j} \psi(x) \right\rangle - \gamma_j \frac{\overline{\partial}}{\partial z_j} + i \frac{\overline{\partial}}{\partial z_0} \right\} \Psi | \Phi) + (\Phi | \int w dx | \Phi) - \lambda(\Phi | \Phi) = 0. \quad (19 \text{ b})$$

Integriert man über d^5z und subtrahiert (19 b) von (19 a), so fallen wegen (16) alle Anteile fort außer den Ableitungen nach z_0 , und es folgt:

$$\int d^4z (\Phi | \Phi) \dot{\Psi} \Psi \text{ ist unabhängig von } z_0.$$

Wegen der Nebenbedingung (3) besagt dies, daß die Norm des Ψ -Feldes konstant ist, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Eins gesetzt werden darf:

$$\int \dot{\Psi} \Psi d^4z = 1. \quad (20)$$

Wir leiten nun den Erhaltungssatz für die Teilchenzahl ab, indem wir eine Phasentransformation mit konstanter Phase α durchführen:

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow e^{i\alpha} \Psi; & \dot{\Psi} &\rightarrow e^{-i\alpha} \dot{\Psi}; \\ f_{kl} &\rightarrow e^{i(k-l)\alpha} f_{kl}; & \dot{f}_{kl} &\rightarrow e^{-i(k-l)\alpha} \dot{f}_{kl}. \end{aligned}$$

Das Variationsproblem ist hiergegen invariant. Für die explizit angegebenen Anteile von (1) und (4) ist dies ersichtlich. Aber auch die Wechselwirkung muß

Nimmt man gleichzeitig eine Transformation δz_0 vor, so erhält man einen Zusatz zu (18), welcher gleich δz_0 mal Integrand von (4) ist. Dieser verschwindet jedoch für Lösungen der Feldgleichungen; die Wirkungsfunktion ist nämlich in f_{kl} homogen linear, und kann daher nach dem EULERSchen Satz für homogene Funktionen aus den Variationsableitungen nach den f_{kl} (welche nach den Feldgleichungen Null sind) durch Multiplikation mit f_{kl} , Integration über alle Koordinaten und Summation über k, l reproduziert werden. Für solche Variationen, bei welchen das Integral von (17) identisch erhalten bleibt, ist F unabhängig von z_0 , es gilt also ein Erhaltungssatz.

Bevor wir dies weiter verfolgen, leiten wir den Erhaltungssatz für die Norm von Ψ her. Variieren wir in Gl. (4) nur $\dot{\Phi}$, nachdem wir sämtliche Differentiationen durch partielle Integration auf den rechten Faktor Φ abgewälzt haben, so erhalten wir die Feldgleichung für $\dot{\Phi}$. Multiplizieren wir diese mit $\dot{\Phi}$, so folgt

phasen-invariant sein; denn sie ist notwendig als invariant gegen die spezielle LORENTZ-Gruppe anzusetzen — LORENTZ-invariante Ausdrücke in den Spinothen $\psi, \dot{\psi}$ und $\Psi, \dot{\Psi}$ sind aber phasen-invariant. — Für infinitesimale α lautet die Transformation

$$\begin{aligned} \delta \Psi &= i \alpha \Psi; & \delta \dot{\Psi} &= -i \alpha \dot{\Psi}; \\ \delta f_{kl} &= i(k-l) \alpha f_{kl}; & \delta \dot{f}_{kl} &= -i(k-l) \alpha \dot{f}_{kl}. \end{aligned} \quad (21)$$

Nach (18) ergibt sich hieraus ein Erhaltungssatz für

$$\int d^4z \dot{\Psi} \Psi [(\Phi | \Phi) + \sum_{kl} (k-l) (\Phi_{kl} | \Phi_{kl})].$$

Mittels (2), (20) und (13) erhält man daraus einen Erhaltungssatz für den Erwartungswert der Teilchenzahl

$$\bar{n} = \int d^4z \dot{\Psi} \Psi (\Phi | n | \Phi). \quad (22)$$

Die Erhaltungssätze für Impuls und Drehimpuls folgert man aus (18), indem man Translationen bzw.

Drehungen der R_4 -Koordinaten vornimmt, und dabei lokale Variationen der Feldfunktionen ausführt, welche die konvektive Änderung kompensieren. Es sei darauf verzichtet, die Erhaltungssätze hier explizit anzugeben.

4. Separation in Mikro- und Makrokosmos

Um mit der vorliegenden Feldtheorie isolierte Mikrosysteme behandeln zu können, muß man zunächst das Feldproblem für einen Mikrokosmos von dem des gesamten Makrokosmos abseparieren. Man hat dabei von einer Situation auszugehen, in welcher der Beobachter eine allgemeine Kenntnis über den

Gesamt-Kosmos mit einer speziellen Kenntnis der näheren Umgebung verbindet. Vom Makrokosmos soll er dabei nur wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit er aus k Teilchen und l Antiteilchen besteht und wie diese statistisch im R_4 verteilt sind; diese Wahrscheinlichkeiten sollen, pro Volumen gerechnet, so gering sein, daß man nicht erwarten kann, eines davon im Mikrobereich zu finden. Mikro- und Makrosystem werden dadurch näherungsweise statistisch voneinander unabhängig und die SCHRÖDINGER-Funktionen f lassen sich als Produkte eines Satzes f_{kl} von Mikrofunktionen mit einem Satze f_{KL} von Makrofunktionen darstellen; die Zustandsfunktion nimmt die Gestalt an

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{nmN} \frac{1}{\sqrt{n! m! N! M!}} \int \hat{f}(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n | z)^2 \hat{f}^*(X_1 \dots X_M | Y_1 \dots Y_N | z) \\ & \cdot \langle \hat{\psi}(x_1) \dots \hat{\psi}(x_m) \hat{\psi}^*(X_1) \dots \hat{\psi}^*(X_M) \psi(y_1) \dots \psi(y_n) \psi(Y_1) \dots \psi(Y_N) \rangle \Phi_0 \\ & \cdot d x_1 \dots d x_m d y_1 \dots d y_n d X_1 \dots d X_M d Y_1 \dots d Y_N. \end{aligned} \quad (23)$$

Die Separation wird dadurch erreicht, daß alle Integrale der Wirkungsfunktion Ω von Gl. (1) vernachlässigt werden, bei welchen eine Mikro-Koordinate mit einer Makro-Koordinate kontrahiert ist; das Gebiet, in welchem die Mikrofunktion von Null verschieden (und dann beträchtlich groß) ist, ist so klein, daß die kleinen Makroamplituden keinen merklichen Beitrag zulassen. Der gesamte Ausdruck Ω zerfällt in zwei Summanden, in welchen die Operationen jeweils auf eines der beiden Systeme wirken, während bezüglich des anderen die Norm ($\Phi | \Phi$) als Faktor abgespalten wird. Die Matrixelemente der Einzelsysteme lassen sich durch die HILBERT-Vektoren

$$\Phi_{\text{ma}} = \sum_{NM} \frac{1}{\sqrt{N! M!}} \int \hat{f}(X_1 \dots X_M | Y_1 \dots Y_N | z) \langle \hat{\psi}(X_1) \dots \hat{\psi}(X_M) \psi(Y_1) \dots \psi(Y_N) \rangle \Phi_0 \cdot d X_1 \dots d X_M d Y_1 \dots d Y_N \quad (24)$$

(analog Φ_{mi}) ausdrücken. Wir nennen

$$\begin{aligned} (\Phi_{\text{ma}} | \Phi_{\text{ma}}) &\equiv N_{\text{ma}}; \quad \left(\Phi_{\text{ma}} \left| \int d^4x \langle \hat{\psi}(x) \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(x) \rangle + \gamma_j \frac{\partial}{\partial z_j} - i \frac{\partial}{\partial z_0} \right| \Phi_{\text{ma}} \right) \equiv \omega_{\text{ma}}; \quad (25) \\ (\Phi_{\text{ma}} | \int w dx | \Phi_{\text{ma}}) &\equiv w_{\text{ma}}. \quad (\text{analog mit Index mi}). \end{aligned}$$

Damit wird $\Omega = \int d^4z \left[\dot{\Psi} \Psi (N_{\text{ma}} \omega_{\text{mi}} + N_{\text{mi}} \omega_{\text{ma}}) + N_{\text{mi}} N_{\text{ma}} \dot{\Psi} \left(\gamma_j \frac{\partial}{\partial z_j} - i \frac{\partial}{\partial z_0} \right) \Psi + N_{\text{ma}} w_{\text{mi}} + N_{\text{mi}} w_{\text{ma}} \right]$.

Neben den Feldgleichungen für Ψ , $\dot{\Psi}$, welche aus dieser Wirkungsfunktion folgen, kann man das Feldproblem für Mikro- und Makrowelt erhalten, indem man nur nach den Mikro- bzw. Makro-Funktionen variiert. Indem man Ω jeweils durch die Norm des anderen Systems dividiert, erhält man für die getrennten Probleme Wirkungsintegrale, welche mit (1) und (4) identisch sind, wenn man an Stelle von λ die Größen einführt

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{ma}} &\equiv \lambda - (\dot{\Psi} \Psi \omega_{\text{mi}} + w_{\text{mi}})/N_{\text{mi}}, \\ \lambda_{\text{mi}} &\equiv \lambda - (\dot{\Psi} \Psi \omega_{\text{ma}} + w_{\text{ma}})/N_{\text{ma}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Wir erhalten dadurch zwei Multiplikatoren, welche die Erfüllung der Nebenbedingungen

$$N_{\text{mi}} = 1; \quad N_{\text{ma}} = 1 \quad (27)$$

erlauben. λ_{mi} tritt in das Mikrosystem als kosmologischer Massenparameter ein. — Als Randbedingungen ergeben sich in beiden Systemen die Gln.(16); doch spielt im Mikrosystem der Urkegel die Rolle des unendlich fernen Lichtkegels.

5. Gestalt der Wechselwirkung

Da wir aus Gründen der Regularität Doppel-Kontraktionen ausgeschlossen haben (s. Ziff. 1), kommen

für $w(x, z)$ Ausdrücke, welche in den Feldoperatoren von höherem als zweiten Grade sind (wie sie von HEISENBERG² verwendet werden), bei uns nicht in Frage. Übergänge zwischen Zuständen verschiedener Teilchenzahl können dann nur noch durch invariante Produktbildungen aus ψ , $\dot{\psi}$ und Ψ , $\dot{\Psi}$ hervorgerufen werden. Die einzigen invarianten Bildungen dieser Art sind

$$\overset{*}{\psi} \Psi; \quad \overset{*}{\Psi} \psi; \quad \overset{*}{\psi} \gamma_0 \Psi; \quad \overset{*}{\Psi} \gamma_0 \psi. \quad (27)$$

Darin ist $\gamma_0 \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ (28)

der DIRAC-Operator, welcher der Eigenzeit z_0 zuzuschreiben ist [die Wirkungsfunktion (1) läßt sich mittels γ_0 5-dimensional symmetrisch schreiben]. Derjenige Ansatz, welcher die einfachste und geringstmögliche Kopplung ergibt, ist

$$w = \frac{1}{L^5} [\overset{*}{\psi} (1 + \gamma_0) \Psi + \overset{*}{\Psi} (1 + \gamma_0) \psi]. \quad (29)$$

Aus Dimensions-Gründen tritt die fünfte Potenz einer universellen Länge L im Nenner auf. Der Faktor $1 + \gamma_0$ bewirkt eine nur zweikomponentige Kopplung und die maximale Verletzung der Paritäts-erhaltung. Innerhalb des ψ -Feldes liefert (29) Kopplungen zwischen Zustandskomponenten, welche sich jeweils um ein Teilchen oder ein Antiteilchen unterscheiden. — Natürlich sind andere reelle Linear-kombinationen der invarianten Produktbildungen nicht a priori ausgeschlossen. Doch dürften quadratische Ausdrücke in den Größen (27) aus Gründen der Einfachheit ausscheiden, anderseits aber auch aus physikalischen Gründen, da sie Übergänge liefern würden, bei denen gleichzeitig ein Teilchen erzeugt und ein Antiteilchen vernichtet würde (und umgekehrt; und zwar so gekoppelt, daß die Teilchenerhaltung gewahrt bleibt).

Bereits in der Einleitung haben wir darauf hin gewiesen, daß Ω nur die Ableitung des Produkts $\Psi \Phi$ enthält, und deshalb die Feldgleichungen nicht ohne weiteres Aussagen über die Änderung von Ψ und Φ einzeln erlauben. Die Feldgleichungen würden es zunächst zulassen, bei Berechnung der Ableitungen nach z_0 einen komplexen Faktor von Ψ auf Φ zu verschieben. Diese Willkür wird eingeschränkt durch

die Normierungsbedingung (3) für Φ ; allerdings wird dabei ein Phasenfaktor noch freigelassen. Dieser Phasenfaktor nun ergibt sich aus der Bedingung, daß die Feldgleichungen für Φ , $\dot{\Phi}$ mit denen für Ψ , $\dot{\Psi}$ verträglich sein müssen. Vergleicht man nämlich die Beziehungen (19 a, b) mit analogen Ausdrücken, welche man aus den Feldgleichungen für Ψ , $\dot{\Psi}$ erhält, so folgt, daß notwendig gelten muß [für eine bilineare Wechselwirkung wie (29)]:

$$\lambda = \left(\Phi \left| \int dx \frac{\partial w}{\partial \Psi} \right| \Phi \right) \Psi = \overset{*}{\Psi} \left(\Phi \left| \int dx \frac{\partial w}{\partial \dot{\Psi}} \right| \Phi \right). \quad (30)$$

Dadurch wird gleichzeitig der Parameter λ festgelegt, und gefordert, daß das Produkt von Ψ mit dem Erwartungswert von $\int dx (\partial w / \partial \Psi)$ reell ist, was auch die noch freie Phase der Änderung von Ψ festlegt. — Die Phase von Ψ gerät damit in feste Abhängigkeit von der Phase des beobachteten Feldes; deshalb gehört die Phasenbeziehung zwischen den Feldern Ψ und ψ nicht zu den Bestimmungsstücken des Systems, sie entspricht also keiner beobachtbaren Größe, wie der Spin und die Parität, welche explizit in die Wechselwirkung eingehen.

6. Schlußbemerkung

Zweck dieser Mitteilung war, zu zeigen, daß und in welcher Weise eine Feld-Quantentheorie der ein-gangs geschilderten Art widerspruchsfrei mathematisch formuliert werden kann. Daß es sich um eine „Monadentheorie“ des DIRAC-Feldes im Sinne der LEIBNIZSchen Monadenlehre handelt, ist offenkundig. Dies ist insofern nicht sehr erstaunlich, als ohnehin die LEIBNIZSche Naturphilosophie viele Züge aufweist, welche unserer modernen Quantenphysik verwandt sind. Der vorstehende Gedankengang läßt durch Einführung des Beobachters und des Ursprungs in die Feldbeschreibung die Verwandtschaft noch stärker ins Auge springen. Über die praktische Brauchbarkeit der Theorie ist damit natürlich nichts ausgesagt; hierüber muß die weitere Untersuchung Aufschluß geben.

Herr Dipl.-Phys. JOSEF KAMPHUSMANN hat mich wesentlich unterstützt bei der Diskussion der Grundlagen, der Erhaltungssätze und der Separation.

² W. HEISENBERG, Z. Naturforschg. 9 a, 292 [1954].